**ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01Математика

Дата проведения : 01.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

Преподаватель : Амирханова А. К.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА**

***Тема****: Интегрирование простейших функций.*

*Вычисление простейших определенных интегралов.*

**Таблица интегралов**



**3.Решение упражнений по образцу.**

Пример 1

Вычислить определенный интеграл


Решение:


(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы  . Появившуюся константу   целесообразно отделить от   и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница  . Сначала подставляем в   верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл


Решение:


**Самостоятельное выполнение заданий.**

1.****

2.

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**

 **ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01Математика

Дата проведения : 02.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

Преподаватель : Амирханова А. К.

**Тема урока:** Интегрирование рациональных функций

Продолжаем заниматься интегрированием дробей. Интегралы от некоторых видов дробей мы уже рассмотрели на уроке [**Интегрирование некоторых дробей**](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_drobei.html), и этот урок в некотором смысле можно считать продолжением. Для успешного понимания материала необходимы базовые навыки интегрирования, поэтому если Вы только приступили к изучению интегралов, то есть, являетесь чайником, то необходимо начать со статьи [**Неопределенный интеграл. Примеры решений**](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html).

Как ни странно, сейчас мы будем заниматься не столько нахождением интегралов, сколько… решением систем линейных уравнений. В этой связи настоятельно рекомендую посетить урок [**Как решить систему линейных уравнений?**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html) А именно – нужно хорошо ориентироваться в методах подстановки («школьном» методе и методе почленного сложения (вычитания) уравнений системы).

Что такое дробно-рациональная функция? Простыми словами, дробно-рациональная функция – это дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены либо произведения многочленов. При этом дроби являются более навороченными, нежели те, о которых шла речь в статье [**Интегрирование некоторых дробей**](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_drobei.html).

**Интегрирование правильной дробно-рациональной функции**

Сразу пример и типовой алгоритм решения интеграла от дробно-рациональной функции.

Пример 1

Найти неопределенный интеграл.


**Шаг 1.**Первое, что мы ВСЕГДА делаем при решении интеграла от дробно-рациональной функции – это выясняем следующий вопрос: **является ли дробь правильной?** Данный шаг выполняется устно, и сейчас я объясню как:

Сначала смотрим на числитель и выясняем *старшую степень* многочлена:

Старшая степень числителя равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и выясняем  *старшую степень* знаменателя. Напрашивающийся путь – это раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, но можно поступить проще, в **каждой** скобке находим старшую степень

и мысленно умножаем:  – таким образом, старшая степень знаменателя равна трём. Совершенно очевидно, что если реально раскрыть скобки, то мы не получим степени, больше трёх.

**Вывод**: Старшая степень числителя  **СТРОГО** меньше старшей степени знаменателя, значит, дробь является правильной.

Если бы в данном примере в числителе находился многочлен 3, 4, 5 и т.д. степени, то дробь была бы **неправильной**.

**Сейчас мы будем рассматривать только правильные дробно-рациональные функции**. Случай, когда степень числителя больше либо равна степени знаменателя, разберём в конце урока.

**Шаг 2.** Разложим знаменатель на множители. Смотрим на наш знаменатель:

Вообще говоря, здесь уже произведение множителей, но, тем не менее, задаемся вопросом: нельзя ли что-нибудь разложить еще? Объектом пыток, несомненно, выступит квадратный трехчлен. Решаем квадратное уравнение:


Дискриминант больше нуля, значит, трехчлен действительно раскладывается на множители:



**Общее правило: ВСЁ, что в знаменателе МОЖНО разложить на множители – раскладываем на множители**

Начинаем оформлять решение:



**Шаг 3.** Методом неопределенных коэффициентов раскладываем подынтегральную функцию в сумму простых (элементарных) дробей. Сейчас будет понятнее.

Смотрим на нашу подынтегральную функцию:


И, знаете, как-то проскакивает интуитивная мысль, что неплохо бы нашу большую дробь превратить в несколько маленьких. Например, вот так:


Возникает вопрос, а можно ли вообще так сделать? Вздохнем с облегчением, соответствующая теорема математического анализа утверждает – МОЖНО. **Такое разложение существует и единственно**.

Только есть одна загвоздочка, коэффициенты  мы *пока* не знаем, отсюда и название – метод неопределенных коэффициентов.

Как вы догадались, последующие телодвижения ~~так, не гоготать!~~ будут направлены на то, чтобы как раз их УЗНАТЬ – выяснить, чему же равны .

Будьте внимательны, подробно объясняю один раз!

Итак, начинаем плясать от:


В левой части приводим выражение к общему знаменателю:


Теперь благополучно избавляемся от знаменателей (т.к. они одинаковы):


В левой части раскрываем скобки, неизвестные коэффициенты  при этом пока не трогаем:



Заодно повторяем школьное правило умножения многочленов. В свою бытность учителем, я научился выговаривать это правило с каменным лицом: **Для того чтобы умножить**[**многочлен**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html)**на**[**многочлен**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html)**нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена**.

С точки зрения понятного объяснения коэффициенты  лучше внести в скобки  (хотя лично я никогда этого не делаю в целях экономии времени):


Составляем систему линейных уравнений.
Сначала разыскиваем старшие степени:

И записываем соответствующие коэффициенты в первое уравнение системы:



**Хорошо запомните следующий нюанс**. Что было бы, если б в правой части вообще не было ? Скажем, красовалось бы просто   без всякого квадрата? В этом случае в уравнении системы нужно было бы поставить справа ноль: . Почему ноль? А потому что в правой части всегда можно приписать этот самый квадрат с нулём: **Если в правой части отсутствуют какие-нибудь переменные или (и) свободный член, то в правых частях соответствующих уравнений системы ставим нули**.

Далее процесс идет по снижающейся траектории, от водки к пиву, отмечаем все «иксы»:


Записываем соответствующие коэффициенты во второе уравнение системы:


И, наконец, минералка, подбираем свободные члены.

Эх,…что-то я расшутился. Шутки прочь  – математика наука серьезная. У нас в институтской группе никто не смеялся, когда доцент сказала, что разбросает члены по [**числовой прямой**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) и выберет из них самые большие. Настраиваемся на серьезный лад. Хотя… кто доживет до конца этого урока, все равно будет тихо улыбаться.



Система готова:



Решаем систему:


(1) Из первого уравнения выражаем  и подставляем его во 2-е и 3-е уравнения системы. На самом деле можно было выразить  (или другую букву) из другого уравнения, но в данном случае выгодно выразить именно из 1-го уравнения, поскольку там *самые маленькие коэффициенты*.

(2) Приводим подобные слагаемые во 2-м и 3-м уравнениях.

(3) Почленно складываем 2-е и 3-е уравнение, при этом, получая равенство , из которого следует, что 

(4) Подставляем  во второе (или третье) уравнение, откуда находим, что 

(5) Подставляем  и  в первое уравнение, получая .

Если возникли трудности с методами решения системы отработайте их на уроке [**Как решить систему линейных уравнений?**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html)

После решения системы всегда полезно сделать проверку – подставить найденные значения  *в каждое* уравнение системы, в результате всё должно «сойтись».

Почти приехали. Коэффициенты  найдены, при этом:


Чистовое оформление задание должно выглядеть примерно так:



Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:








Как видите, основная трудность задания состояла в том, чтобы составить (правильно!) и решить (правильно!) систему линейных уравнений. А на завершающем этапе всё не так сложно: используем свойства линейности неопределенного интеграла и интегрируем. Обращаю внимание, что под каждым из трёх интегралов у нас «халявная» сложная функция, об особенностях ее интегрирования я рассказал на уроке [**Метод замены переменной в неопределенном интеграле**](http://www.mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html).

Проверка: Дифференцируем ответ:



Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.
В ходе проверки пришлось приводить выражение к общему знаменателю, и это не случайно. **Метод неопределенных коэффициентов и приведение выражения к общему знаменателю – это взаимно обратные действия**.

Пример 2

Найти неопределенный интеграл.


Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Вернемся к дроби из первого примера: . Нетрудно заметить, что в знаменателе все множители РАЗНЫЕ. Возникает вопрос, а что делать, если дана, например, такая дробь: ?  Здесь в знаменателе у нас степени, или, по-математически *кратные множители*.  Кроме того, есть неразложимый на множители квадратный трехчлен  (легко убедиться, что дискриминант уравнения  отрицателен, поэтому на множители трехчлен никак не разложить). Что делать? Разложение в сумму элементарных дробей будет выглядеть наподобие  с неизвестными коэффициентами  вверху или как-то по-другому?

Пример 3

Представить функцию  в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

**Шаг 1.**Проверяем, правильная ли у нас дробь
Старшая степень числителя: 2
Старшая степень знаменателя: 8
, значит, дробь является правильной.

**Шаг 2.** Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Очевидно, что нет, всё уже разложено. Квадратный трехчлен  не раскладывается в произведение по указанным выше причинам. Гуд. Работы меньше.

Пример 4

Представить функцию  в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.
**Строго следуйте алгоритму!**

Если Вы разобрались, по каким принципам нужно раскладывать дробно-рациональную функцию в сумму, то сможете разгрызть практически любой интеграл рассматриваемого типа.

Пример 5

Найти неопределенный интеграл.


**Шаг 1.**Очевидно, что дробь является правильной: 

**Шаг 2.** Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Можно. Здесь сумма кубов . Раскладываем знаменатель на множители, используя формулу сокращенного умножения 



**Самостоятельная работа.**

**Пример 5**

**Найти неопределенный интеграл.
**

**Пример 6**

**Найти неопределенный интеграл.
**

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**

 **ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01 Математика

Дата проведения : 03.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

Преподаватель : Амирханова А. К.

Тема урока: Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы, в которых подынтегральная функция представляет собой произведение синусов и косинусов первой степени от икса, умноженного на разные множители, то есть интегралы вида

 (1)

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами

 (2)
 (3)
 (4)
можно преобразовать каждое из произведений в интегралах вида (31) в алгебраическую сумму и проинтегрировать по формулам

 (5)

и

 (6)

**Пример 1.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**



Решение. По формуле (2) при



имеем



Поэтому



Применяя далее формулу (5), получим



**Пример 2.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**



Решение. По формуле (3) при  получаем следующее преобразование подынтегрального выражения:



Поэтому



Применяя далее формулу (6), получим



Для самопроверки при расчетах можно воспользоваться [**калькулятором неопределённых интегралов онлайн**](https://function-x.ru/indefint_calculator.html).

## Интеграл произведения степеней синуса и косинуса одного и того же аргумента

Рассмотрим теперь интегралы от функций, представляющих собой произведение степеней синуса и косинуса одного и того же аргумента, т.е.

 (7)

В частных случаях один из показателей (m или n) может равняться нулю.

При интегрировании таких функций используется то, что чётную степень косинуса можно выразить через синус, а дифференциал синуса равен cos x dx (или чётную степень синуса можно выразить через косинус, а дифференциал косинуса равен - sin x dx).

Следует различать два случая: 1) хотя бы один из показателей m и n нечётный; 2) оба показателя чётные.

Пусть имеет место первый случай, а именно показатель n = 2k + 1 - нечётный. Тогда, учитывая, что



получим



Подынтегральное выражение представлено в таком виде, что одна его часть – функция только синуса, а другая – дифференциал синуса. Теперь с помощью замены переменной t = sin x решение сводится к интегрированию многочлена относительно t. Если же только степень m нечётна, то поступают аналогично, выделяя множитель sinx, выражая остальную часть подынтегральной функции через cos x и полагая t = cos x. Этот приём можно использовать и при **интегрировании частного степеней синуса и косинуса**, когда **хотя бы один из показателей - нечётный**. Всё дело в том, что **частное степеней синуса и косинуса - это частный случай их произведения**: когда тригонометрическая функция находится в знаменателе подынтегрального выражения, её степень - отрицательная. Но бывают и случаи частного тригонометрических функций, когда их степени - только чётные. О них - следующем абзаце.

Если же оба показателя m и n – чётные, то, используя тригонометрические формулы



понижают показатели степени синуса и косинуса, после чего получится интеграл того же типа, что и выше. Поэтому интегрирование следует продолжать по той же схеме. **Если же один из чётных показателей - отрицательный, то есть рассматривается частное чётных степеней синуса и косинуса, то данная схема не годится**. Тогда используется замена переменной в зависимости от того, как можно преобразовать подынтегральное выражение. Такой случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

**Пример 3.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**



Решение. Показатель степени косинуса – нечётный. Поэтому представим


в виде



и произведём замену переменной t = sin x (тогда dt = cos x dx). Тогда получим



Найти **интеграл от тригонометрической функции**



.

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**