**ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01Математика

Дата проведения : 01.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

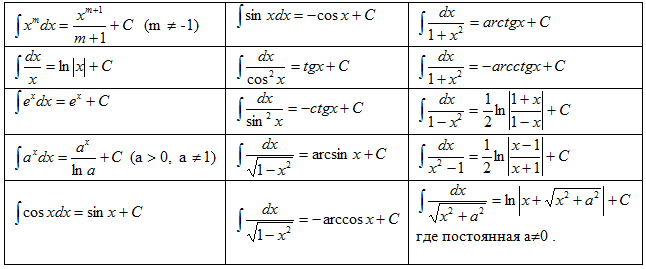
Преподаватель : Амирханова А. К.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА**

***Тема****: Интегрирование простейших функций.*

*Вычисление простейших определенных интегралов.*

**Таблица интегралов**



**3.Решение упражнений по образцу.**

Пример 1

Вычислить определенный интеграл  
https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_2.png

Решение:  
https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_3.png

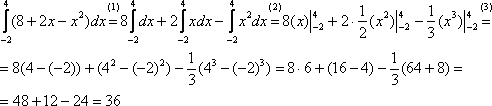
(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_4.png . Появившуюся константу https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_5.png  целесообразно отделить от https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_6.png  и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_7.png . Сначала подставляем в https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_6.png  верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл  
https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_10.png

Решение:  


**Самостоятельное выполнение заданий.**

1.**https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_16.png**

2.https://fsd.multiurok.ru/html/2019/11/22/s_5dd84aedbdcfa/1264343_13.png

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**

**ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01Математика

Дата проведения : 02.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

Преподаватель : Амирханова А. К.

**Тема урока:** Интегрирование рациональных функций

Продолжаем заниматься интегрированием дробей. Интегралы от некоторых видов дробей мы уже рассмотрели на уроке [**Интегрирование некоторых дробей**](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_drobei.html), и этот урок в некотором смысле можно считать продолжением. Для успешного понимания материала необходимы базовые навыки интегрирования, поэтому если Вы только приступили к изучению интегралов, то есть, являетесь чайником, то необходимо начать со статьи [**Неопределенный интеграл. Примеры решений**](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html).

Как ни странно, сейчас мы будем заниматься не столько нахождением интегралов, сколько… решением систем линейных уравнений. В этой связи настоятельно рекомендую посетить урок [**Как решить систему линейных уравнений?**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html) А именно – нужно хорошо ориентироваться в методах подстановки («школьном» методе и методе почленного сложения (вычитания) уравнений системы).

Что такое дробно-рациональная функция? Простыми словами, дробно-рациональная функция – это дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены либо произведения многочленов. При этом дроби являются более навороченными, нежели те, о которых шла речь в статье [**Интегрирование некоторых дробей**](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_drobei.html).

**Интегрирование правильной дробно-рациональной функции**

Сразу пример и типовой алгоритм решения интеграла от дробно-рациональной функции.

Пример 1

Найти неопределенный интеграл.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image002.gif

**Шаг 1.**Первое, что мы ВСЕГДА делаем при решении интеграла от дробно-рациональной функции – это выясняем следующий вопрос: **является ли дробь правильной?** Данный шаг выполняется устно, и сейчас я объясню как:

Сначала смотрим на числитель и выясняем *старшую степень* многочлена:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image004.jpg  
Старшая степень числителя равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и выясняем  *старшую степень* знаменателя. Напрашивающийся путь – это раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, но можно поступить проще, в **каждой** скобке находим старшую степень  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image006.jpg  
и мысленно умножаем: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image008.gif – таким образом, старшая степень знаменателя равна трём. Совершенно очевидно, что если реально раскрыть скобки, то мы не получим степени, больше трёх.

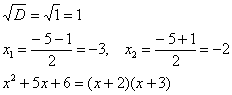
**Вывод**: Старшая степень числителя  **СТРОГО** меньше старшей степени знаменателя, значит, дробь является правильной.

Если бы в данном примере в числителе находился многочлен 3, 4, 5 и т.д. степени, то дробь была бы **неправильной**.

**Сейчас мы будем рассматривать только правильные дробно-рациональные функции**. Случай, когда степень числителя больше либо равна степени знаменателя, разберём в конце урока.

**Шаг 2.** Разложим знаменатель на множители. Смотрим на наш знаменатель:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image010.gif  
Вообще говоря, здесь уже произведение множителей, но, тем не менее, задаемся вопросом: нельзя ли что-нибудь разложить еще? Объектом пыток, несомненно, выступит квадратный трехчлен. Решаем квадратное уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image012.gif

Дискриминант больше нуля, значит, трехчлен действительно раскладывается на множители:



**Общее правило: ВСЁ, что в знаменателе МОЖНО разложить на множители – раскладываем на множители**

Начинаем оформлять решение:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image016.gif

**Шаг 3.** Методом неопределенных коэффициентов раскладываем подынтегральную функцию в сумму простых (элементарных) дробей. Сейчас будет понятнее.

Смотрим на нашу подынтегральную функцию:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image018.gif

И, знаете, как-то проскакивает интуитивная мысль, что неплохо бы нашу большую дробь превратить в несколько маленьких. Например, вот так:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image020.gif

Возникает вопрос, а можно ли вообще так сделать? Вздохнем с облегчением, соответствующая теорема математического анализа утверждает – МОЖНО. **Такое разложение существует и единственно**.

Только есть одна загвоздочка, коэффициенты http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022.gif мы *пока* не знаем, отсюда и название – метод неопределенных коэффициентов.

Как вы догадались, последующие телодвижения ~~так, не гоготать!~~ будут направлены на то, чтобы как раз их УЗНАТЬ – выяснить, чему же равны http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0000.gif.

Будьте внимательны, подробно объясняю один раз!

Итак, начинаем плясать от:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image020_0000.gif

В левой части приводим выражение к общему знаменателю:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image025.gif

Теперь благополучно избавляемся от знаменателей (т.к. они одинаковы):  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image027.gif

В левой части раскрываем скобки, неизвестные коэффициенты http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0001.gif при этом пока не трогаем:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image029.gif

Заодно повторяем школьное правило умножения многочленов. В свою бытность учителем, я научился выговаривать это правило с каменным лицом: **Для того чтобы умножить**[**многочлен**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html)**на**[**многочлен**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html)**нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена**.

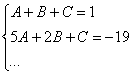
С точки зрения понятного объяснения коэффициенты http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0002.gif лучше внести в скобки  (хотя лично я никогда этого не делаю в целях экономии времени):  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image031.gif

Составляем систему линейных уравнений.  
Сначала разыскиваем старшие степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image033.jpg  
И записываем соответствующие коэффициенты в первое уравнение системы:



**Хорошо запомните следующий нюанс**. Что было бы, если б в правой части вообще не было http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image037.gif? Скажем, красовалось бы просто  http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image039.gif без всякого квадрата? В этом случае в уравнении системы нужно было бы поставить справа ноль: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image041.gif. Почему ноль? А потому что в правой части всегда можно приписать этот самый квадрат с нулём: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image043.gif**Если в правой части отсутствуют какие-нибудь переменные или (и) свободный член, то в правых частях соответствующих уравнений системы ставим нули**.

Далее процесс идет по снижающейся траектории, от водки к пиву, отмечаем все «иксы»:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image045.jpg

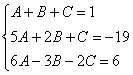
Записываем соответствующие коэффициенты во второе уравнение системы:  


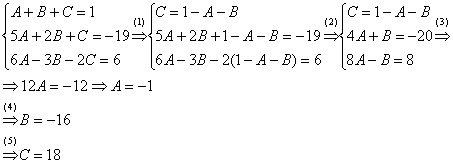
И, наконец, минералка, подбираем свободные члены.

Эх,…что-то я расшутился. Шутки прочь  – математика наука серьезная. У нас в институтской группе никто не смеялся, когда доцент сказала, что разбросает члены по [**числовой прямой**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) и выберет из них самые большие. Настраиваемся на серьезный лад. Хотя… кто доживет до конца этого урока, все равно будет тихо улыбаться.

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image049.jpg

Система готова:



Решаем систему:  


(1) Из первого уравнения выражаем http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image055.gif и подставляем его во 2-е и 3-е уравнения системы. На самом деле можно было выразить http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image055_0000.gif (или другую букву) из другого уравнения, но в данном случае выгодно выразить именно из 1-го уравнения, поскольку там *самые маленькие коэффициенты*.  
  
(2) Приводим подобные слагаемые во 2-м и 3-м уравнениях.

(3) Почленно складываем 2-е и 3-е уравнение, при этом, получая равенство http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image057.gif, из которого следует, что http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image059.gif

(4) Подставляем http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image059_0000.gif во второе (или третье) уравнение, откуда находим, что http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image061.gif

(5) Подставляем http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image059_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image061_0000.gif в первое уравнение, получая http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image063.gif.

Если возникли трудности с методами решения системы отработайте их на уроке [**Как решить систему линейных уравнений?**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html)

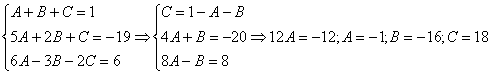
После решения системы всегда полезно сделать проверку – подставить найденные значения http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0003.gif *в каждое* уравнение системы, в результате всё должно «сойтись».

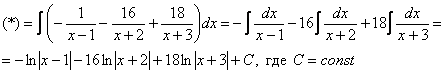
Почти приехали. Коэффициенты http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0004.gif найдены, при этом:  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image065.gif

Чистовое оформление задание должно выглядеть примерно так:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image067.gif

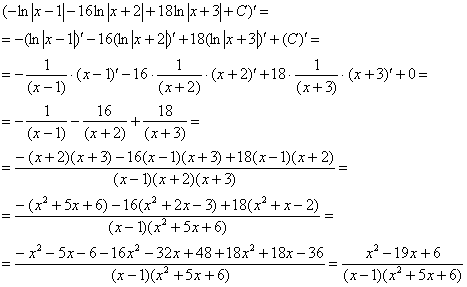
Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image020_0001.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image027_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image029_0000.gif  




Как видите, основная трудность задания состояла в том, чтобы составить (правильно!) и решить (правильно!) систему линейных уравнений. А на завершающем этапе всё не так сложно: используем свойства линейности неопределенного интеграла и интегрируем. Обращаю внимание, что под каждым из трёх интегралов у нас «халявная» сложная функция, об особенностях ее интегрирования я рассказал на уроке [**Метод замены переменной в неопределенном интеграле**](http://www.mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html).

Проверка: Дифференцируем ответ:



Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.  
В ходе проверки пришлось приводить выражение к общему знаменателю, и это не случайно. **Метод неопределенных коэффициентов и приведение выражения к общему знаменателю – это взаимно обратные действия**.

Пример 2

Найти неопределенный интеграл.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image078.gif

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Вернемся к дроби из первого примера: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image080.gif. Нетрудно заметить, что в знаменателе все множители РАЗНЫЕ. Возникает вопрос, а что делать, если дана, например, такая дробь: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image082.gif?  Здесь в знаменателе у нас степени, или, по-математически *кратные множители*.  Кроме того, есть неразложимый на множители квадратный трехчлен http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image084.gif (легко убедиться, что дискриминант уравнения http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image086.gif отрицателен, поэтому на множители трехчлен никак не разложить). Что делать? Разложение в сумму элементарных дробей будет выглядеть наподобие http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image088.gif с неизвестными коэффициентами http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image022_0005.gif вверху или как-то по-другому?

Пример 3

Представить функцию http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image082_0000.gif в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

**Шаг 1.**Проверяем, правильная ли у нас дробь  
Старшая степень числителя: 2  
Старшая степень знаменателя: 8  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image091.gif, значит, дробь является правильной.

**Шаг 2.** Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Очевидно, что нет, всё уже разложено. Квадратный трехчлен http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image093.gif не раскладывается в произведение по указанным выше причинам. Гуд. Работы меньше.

Пример 4

Представить функцию http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image118.gif в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.  
**Строго следуйте алгоритму!**

Если Вы разобрались, по каким принципам нужно раскладывать дробно-рациональную функцию в сумму, то сможете разгрызть практически любой интеграл рассматриваемого типа.

Пример 5

Найти неопределенный интеграл.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image120.gif

**Шаг 1.**Очевидно, что дробь является правильной: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image122.gif

**Шаг 2.** Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Можно. Здесь сумма кубов http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image124.gif. Раскладываем знаменатель на множители, используя формулу сокращенного умножения http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image126.gif

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image128.gif

**Самостоятельная работа.**

**Пример 5**

**Найти неопределенный интеграл.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image146.gif**

**Пример 6**

**Найти неопределенный интеграл.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii_clip_image148.gif**

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**

**ПЛАН УРОКА**

Урок №

Дисциплина : ЕН-01 Математика

Дата проведения : 03.11.2021.

Группа № 3-6

Профессия:

Преподаватель : Амирханова А. К.

Тема урока: Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы, в которых подынтегральная функция представляет собой произведение синусов и косинусов первой степени от икса, умноженного на разные множители, то есть интегралы вида

https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image002.gif (1)

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами

формула, необходимая для интегрирования тригонометрических функций (2)  
формула, необходимая для интегрирования тригонометрических функций (3)  
формула, необходимая для интегрирования тригонометрических функций (4)  
можно преобразовать каждое из произведений в интегралах вида (31) в алгебраическую сумму и проинтегрировать по формулам

формула, необходимая для интегрирования тригонометрических функций (5)

и  
  
формула, необходимая для интегрирования тригонометрических функций (6)

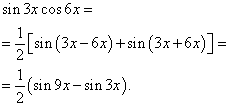
**Пример 1.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**

https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image014.gif

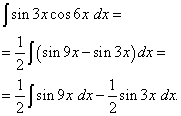
Решение. По формуле (2) при

https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image016.gif

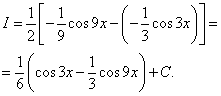
имеем



Поэтому



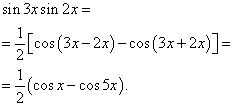
Применяя далее формулу (5), получим



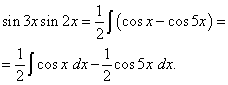
**Пример 2.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**

https://function-x.ru/chapter8-3/trig001.gif

Решение. По формуле (3) при https://function-x.ru/chapter8-3/trig002.gif получаем следующее преобразование подынтегрального выражения:



Поэтому



Применяя далее формулу (6), получим

https://function-x.ru/chapter8-3/trig005.gif

Для самопроверки при расчетах можно воспользоваться [**калькулятором неопределённых интегралов онлайн**](https://function-x.ru/indefint_calculator.html).

## Интеграл произведения степеней синуса и косинуса одного и того же аргумента

Рассмотрим теперь интегралы от функций, представляющих собой произведение степеней синуса и косинуса одного и того же аргумента, т.е.

https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image024.gif (7)

В частных случаях один из показателей (m или n) может равняться нулю.

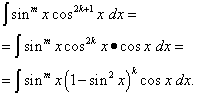
При интегрировании таких функций используется то, что чётную степень косинуса можно выразить через синус, а дифференциал синуса равен cos x dx (или чётную степень синуса можно выразить через косинус, а дифференциал косинуса равен - sin x dx).

Следует различать два случая: 1) хотя бы один из показателей m и n нечётный; 2) оба показателя чётные.

Пусть имеет место первый случай, а именно показатель n = 2k + 1 - нечётный. Тогда, учитывая, что

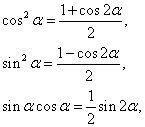
https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image026.gif

получим



Подынтегральное выражение представлено в таком виде, что одна его часть – функция только синуса, а другая – дифференциал синуса. Теперь с помощью замены переменной t = sin x решение сводится к интегрированию многочлена относительно t. Если же только степень m нечётна, то поступают аналогично, выделяя множитель sinx, выражая остальную часть подынтегральной функции через cos x и полагая t = cos x. Этот приём можно использовать и при **интегрировании частного степеней синуса и косинуса**, когда **хотя бы один из показателей - нечётный**. Всё дело в том, что **частное степеней синуса и косинуса - это частный случай их произведения**: когда тригонометрическая функция находится в знаменателе подынтегрального выражения, её степень - отрицательная. Но бывают и случаи частного тригонометрических функций, когда их степени - только чётные. О них - следующем абзаце.

Если же оба показателя m и n – чётные, то, используя тригонометрические формулы



понижают показатели степени синуса и косинуса, после чего получится интеграл того же типа, что и выше. Поэтому интегрирование следует продолжать по той же схеме. **Если же один из чётных показателей - отрицательный, то есть рассматривается частное чётных степеней синуса и косинуса, то данная схема не годится**. Тогда используется замена переменной в зависимости от того, как можно преобразовать подынтегральное выражение. Такой случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

**Пример 3.**Найти **интеграл от тригонометрической функции**

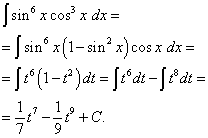
https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image032.gif

Решение. Показатель степени косинуса – нечётный. Поэтому представим  
https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image034.gif

в виде

https://function-x.ru/chapter8-3/integral3_clip_image036.gif

и произведём замену переменной t = sin x (тогда dt = cos x dx). Тогда получим



Найти **интеграл от тригонометрической функции**

https://function-x.ru/chapter8-3/trig001.gif

https://function-x.ru/chapter8-3/trig010.gif.

**Жду ваши ответы и вопросы на своей электронной почте.**

asiyat.karimullaevna@yandex.ru

**8928-507-47-03**